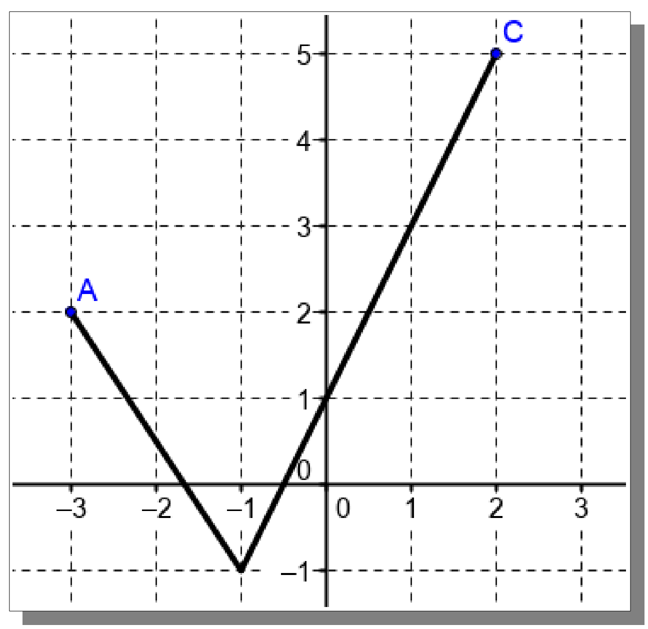
Les fonctions (CST 4)

1. L'analyse des fonctions (rappel)

- La variable dépendante est représentée par le « y » (ou l'ordonnée).
- La variable indépendante est représentée par le « x » (ou l'abscisse).
- Domaine : Toutes les valeurs de « x » possibles.
- Image (codomaine) : Toutes les valeurs de « y » possibles.
- Intervalle de croissance (décroissance) : Pour quelles valeurs de « x », le « y » augmente ou diminue-t-il.
- Signe de l'image : Pour quelles valeurs de « x », le « y » est-il positif ou négatif.
- Le(s) zéro(s) (abscisse à l'origine) : La valeur de « x » lorsque y = 0.
- L'abscisse à l'origine (valeur initiale) : La valeur de « y » 1orsque x = 0.
- Extremum : Maximum ou minimum (en « y »).

Exemple :

- Le domaine est [-3, 2]
- L'image est [-1, 5]
- La fonction est croissante : [-1,2]
- La fonction est décroissante : [-3,-1]
- La fonction est positive : [-3 , -1.66]U[-0.5 , 2]
- La fonction est négative : [-1,66, 0,5]
- Les zéros sont -1,66 et -0,5.
- L'ordonnée à l'origine est 1
- Le maximum est 5 et le minimum est -1



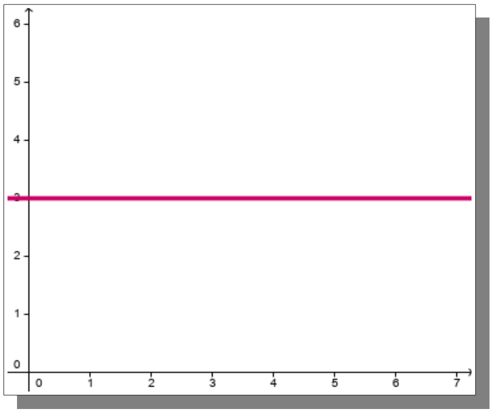
2. Les types de fonctions

a) **Les fonctions de degré 0** (nulle).

C'est une fonction qui ne varie pas. Peu importe la valeur de « x » (variable indépendante) donnée, la valeur de « y » (variable dépendante) ne change pas.

La règle de ce type de fonction est toujours de forme f(x) = k (où k = constante).

Par exemple, f(x) = 3 donnera le graphique ci-bas et la table de valeur située à côté.



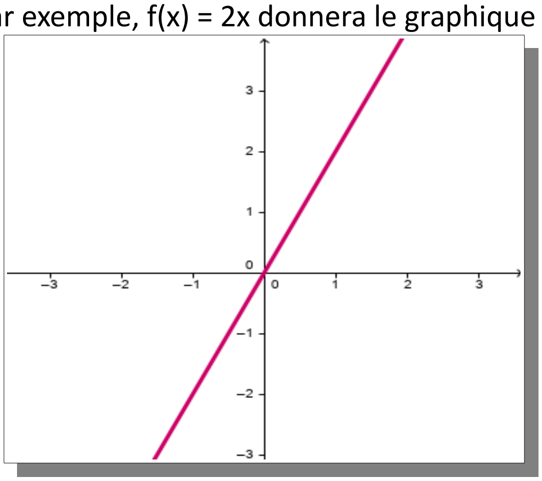
x	**f(x)**
0	3
1	3
2	3
3	3
4	3

b) **Les fonctions de degré 1** (variation directe, partielle, linéaire ou affine)

C'est une fonction qui varie de façon linéaire (ligne droite). Elle peut représenter une situation proportionnelle (dans le sens que lorsque les « x » doublent, les « y » doublent) ou une situation partiellement proportionnelle (dans le sens où on doit ajuster pour que ce soit proportionnel).

La règle de ce type de fonction est soit de forme f(x) = ax (où a = taux de variation), soit de forme f(x) = ax + b (où b représente la valeur initiale (ordonnée à l'origine)).

Par exemple, f(x) = 2x donnera le graphique ci-bas et la table de valeur située à côté.



x	f(x)
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8

NB : Une variation directe passe toujours par l'origine (0,0), ce qui n'est pas le cas pour une partielle.

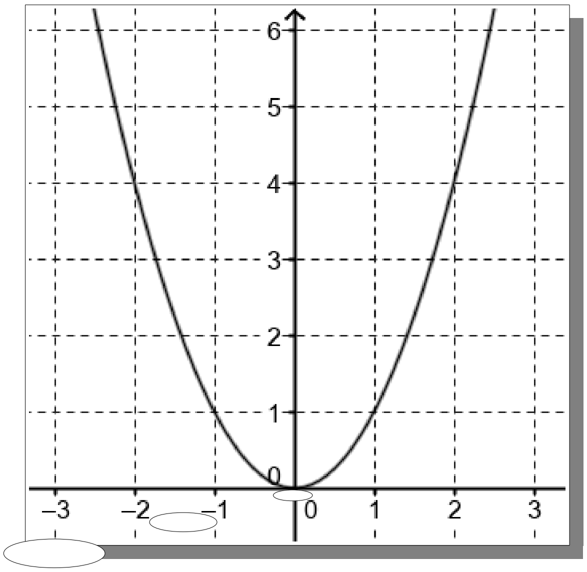
c) **Les fonctions de degré 2** (proportionnelle au carré)

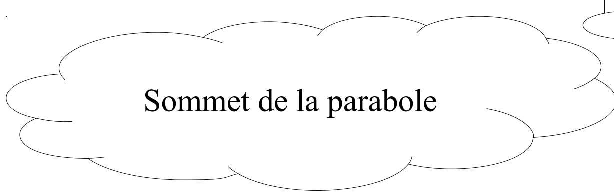
C'est une fonction où le lien entre les variables est proportionnel au carré (exposant 2). À la base, le lien entre les variables est tel que celui illustré dans cette table de valeur.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	x
y	9	4	1	0	1	4	9	x²

Comme le carré d'un nombre négatif donne un nombre positif, le graphique de cette fonction s'appelle une parabole (comme une antenne parabolique).

Le graphique passe par l'origine. Cependant, la règle de cette fonction est f(x) = ax². Le paramètre « a » ne représente pas la pente, ni un taux de variation. En fait, plus il est élevé, plus l'ouverture de la parabole est fermée. Plus il se rapproche de 0, plus l'ouverture est grande. Si le paramètre « a » est négatif, la parabole sera à l'envers (∩).



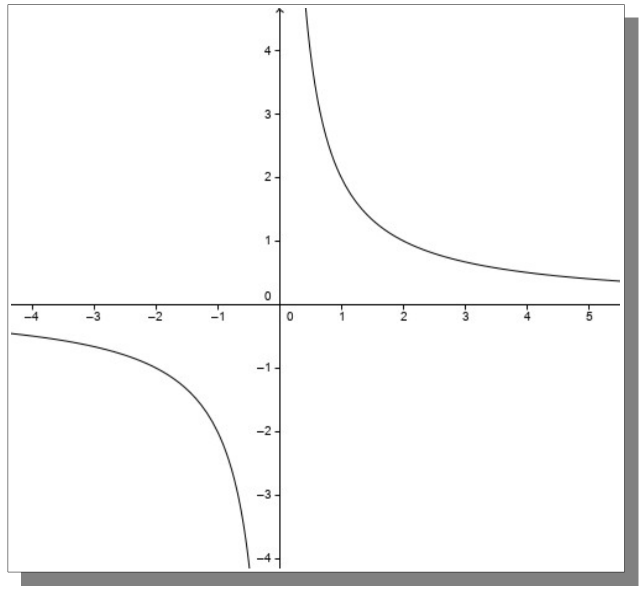


Pour trouver la règle d'une fonction de degré 2, il faut connaître un point autre que le sommet. Ensuite, il faut remplacer les variables « x » et « f(x) » par les coordonnées du point qu'on connaît et ensuite, il faut isoler la valeur du paramètre « a ».

Par exemple, si ta parabole passe par le point (3,8) et que le sommet est à l'origine, tu écrieras :
$8 = a \times 3^2$ et tu n'auras qu'à isoler le paramètre a qui vaut donc 8/9.

La règle sera donc $f(x) = \frac{8}{9}x^2$.

d) **Fonction de variation inverse**

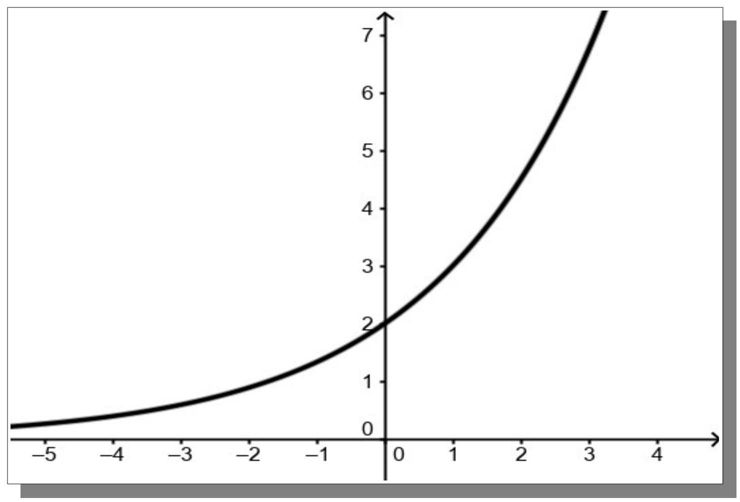


C'est une fonction qui a été vue en 3e secondaire. Elle représente le cas où plus la variable « x » augmente (au niveau multiplicatif), plus la variable « y » diminue (au niveau multiplicatif). On peut aussi considérer l'inverse (dans le sens que plus « y » augmente, plus « x » diminue).

Au niveau du graphique, il est représenté ci-contre.

C'est une fonction qui ne possède pas de sommet et qui ne passe pas par l'origine. Elle ne possède ni de zéro, ni d'ordonnée à l'origine. Sa règle est $f(x)=\frac{a}{x}$ où « a » est le produit de « x » et « f(x) ».

e) **Fonction exponentielle**



Cette fonction existe lorsque la variable indépendante est représentée par un exposant. Elle représente généralement une accélération d'un mouvement, une multiplication de bactéries ou autre bibittes, une augmentation ou diminution d'un montant d'argent selon un taux d'intérêt.

Graphiquement, il s'agit d'une courbe qui ne touche pas à l'axe horizontale et qui est soit croissante, soit décroissante.

L'équation de base de cette fonction est $f(x)=ab^x$. Comme le montre l'illustration ci-haut, la courbe de base ne passe pas par l'origine.

On peut aussi représenter cette équation par la règle suivante : $\mathbf{V_f = V_i (1 +/- taux)^{temps}}$, où

$\mathbf{V_f}$ = valeur finale
$\mathbf{V_i}$ = valeur initiale
1 +/1 taux = l'augmentation ou diminution selon un taux ou le fait de doubler, tripler, … (Attention, car si tu doubles, t'augmentes de 100%, si tu triples, t'augmentes de 200%!!)
temps = la durée de l'expérience.

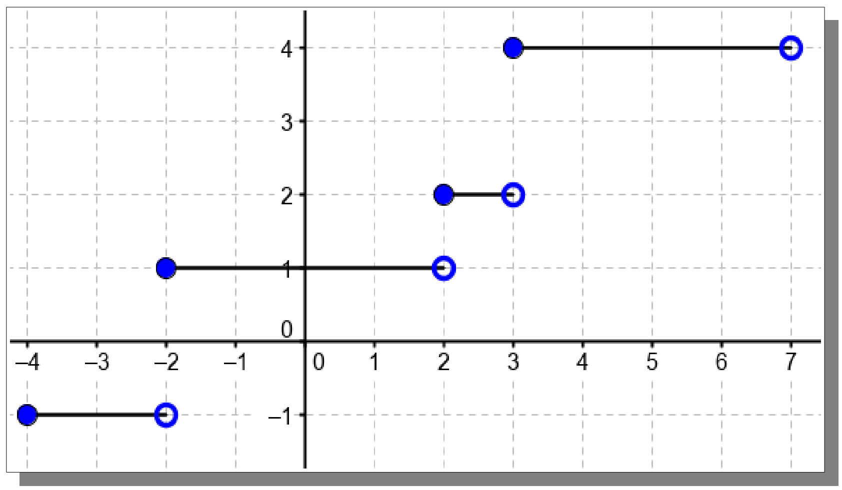
Par exemple, on sait que des bactéries quadruplent à toutes les journées. Au départ de l'expérience, il y avait 23 bactéries. Combien y-en-a-t-il au bout de 15 jours?

La règle sera : $V_f = 23(3)^{15}$, ce qui donne 330 024 861 bactéries!

Un autre exemple serait de trouver combien d'argent tu auras si tu places 500$ à 4% d'intérêt pendant 8 ans. La règle sera $V_f = 500(1+0{,}04)^8$, ce qui donne 684,28$

Un dernier exemple serait le cas où tu achètes un véhicule neuf à 22 000$ et qu'il perd 25% de sa valeur par année. Combien vaudra-t-il au bout de 7 ans? La règle sera $V_f = 22\,000(1-0{,}25)^7$, ce qui donne 2936,65$

f) **Fonction en escalier**



Ce type de fonction est composé de demi-droites horizontales débutant ou se terminant par un rond plein (signifie que ça appartient ou que c'est inclus) ou un rond vide (signifie que ça n'appartient pas ou que ce n'est pas inclus).

Les « marches » peuvent être de longueur différentes et les contres-marches peuvent être de distances non constantes.

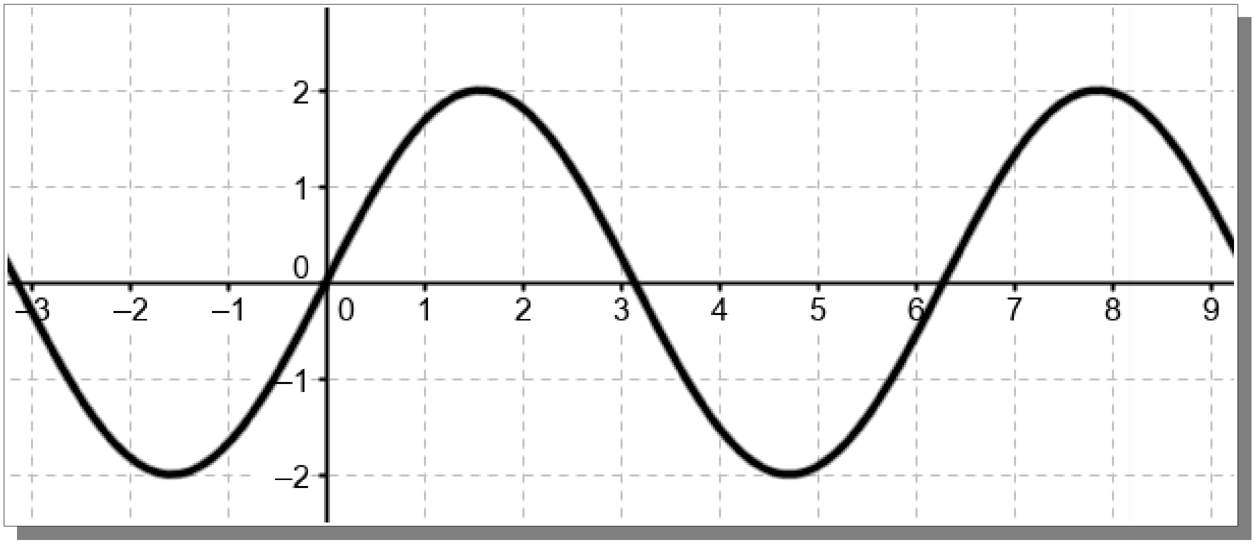
Deux ronds pleins ne peuvent pas être superposés.

Ce type de fonction sert principalement à illustrer des situations où la valeur de la variable dépendante (« y ») varie soudainement après avoir été constante un certain temps. Par exemple, dans un stationnement public, on peut te dire que le coût de stationnement est de 2$ par 30 minutes, maximum 12$. Si tu te stationnes 45 minutes, tu paies 4$. Pour 55 minutes, tu paies la même chose, mais pour 65 minutes, tu paieras 6$!

Cette fonction est étudiée en SN4 sous la forme de la fonction par parties entières.

g) **Fonction périodique**

Ce type de fonction présente une situation se répétant à l'infini, un peu comme le mouvement d'une vague ou d'un pendule (dans une situation mathématiquement parfaite).



Il existe plusieurs types de fonction périodiques. Il suffit seulement de bien visualiser que le motif initial se répète à l'infini. Ce type de fonction est surtout étudié à partir de SN5.

h) **Fonction par parties**

Cette fonction représente en fait des bouts de courbes (ou droites) reliées entre elles. L'important dans ce type de fonction est de savoir bien l'analyser (voir début de ce document).